(d) Establish the reduction formula for $\int (\log x)^n \, dx$ and use it to evaluate $\int (\log x)^3 \, dx$.

$\int (\log x)^n \, dx$ ৰ লঘুকৰণ সূত্ৰটো নিৰ্ণয় কৰা আৰু ইয়াক ব্যৱহাৰ কৰি $\int (\log x)^3 \, dx$ ৰ মান উলিওৱা।

Total number of printed pages–8

24R/23A–2025 (MAT2104M)

2025

MATHEMATICS

(Minor)

Paper : MAT2104M

(Calculus)

G.L. CHOUDHURY COLLEGE M.L.C. LIBRARY

Full Marks : 60

Time : 2½ hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

1. Answer the following questions : 1×7=7

তলত দিয়া প্ৰশ্নসমূহৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) What is the nth derivatives of $y = e^{ax+b}$?

$y = e^{ax+b}$ ৰ n-তম অবকলজ কি?

(b) Write down the Leibnitz's Theorem.

লেইবনিজৰ উপপাদ্যটো লিখা।

(c) Define the radius of curvature of a curve.

এটা বক্ৰৰ বক্ৰতা ব্যাসাৰ্ধৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(d) What is the value of $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$?

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$ ৰ মান লিখা।

G.L. CHOUDHURY COLLEGE M.L.C. LIBRARY

(e) Evaluate $\int_0^{\pi/2} \cos^{10} x \, dx$.

$\int_0^{\pi/2} \cos^{10} x \, dx$ ৰ মান উলিওৱা।

(f) Write the reduction formula for $\int x^n e^{ax} dx$.

$\int x^n e^{ax} dx$ ৰ লঘুকৰণ সূত্ৰটো লিখা।

(g) If $\phi(x,y,z) = x^2y + xy^2 + z^2$, find $\Delta\phi$ at (1,1,1).

যদি $\phi(x,y,z) = x^2y + xy^2 + z^2$, তেন্তে $\Delta\phi$ ৰ মান (1,1,1) ত উলিওৱা।

2. Answer the following questions : 2×4=8

তলত দিয়া প্ৰশ্নসমূহৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) If (যদি) $y = x^{2n}$ then prove that (তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে),

$$y_n = 2^n\{1.3.5......(2n-1)\}\, x^n \ \forall n \in \mathbb{N}$$

(b) Evaluate (মান উলিওৱা) :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x^2}{x^3}$$

(c) Show that (দেখুওৱা যে)

$curl\,(grad\,\phi) = 0$, where ϕ is any scalar function (য'ত ϕ এটা স্কেলাৰ ফলন হয়)।

(d) Evaluate (মান উলিওৱা) :

$$\int_0^a \frac{x^4}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx.$$

3. Answer *(a)* and *[(b)* **or** *(c)]* and *[(d)* **or** *(e)]* of the following : 5×3=15

(a) আৰু *[(b)* অথবা *(c)]* আৰু *[(d)* অথবা *(e)]* ৰ উত্তৰ লিখা ঃ

(a) If (যদি) $y = log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^m$ then (তেন্তে)

prove that (প্ৰমাণ কৰা যে)

$$\left(1+x^2\right)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + m^2y_n = 0.$$

(b) If $\bar{u}$ and $\bar{v}$ are two vector functions of a scalar variable '*t*', prove that

$$\frac{d}{dt}(\bar{u}\times\bar{v}) = \bar{u}\times\frac{d\bar{v}}{dt} + \frac{d\bar{u}}{dt}\times\bar{v}.$$

যদি $\bar{u}$ আৰ $\bar{v}$ অদিশ চলৰ *t*-ৰ ফলন হয়, প্ৰমাণ কৰা

যে $\frac{d}{dt}(\bar{u}\times\bar{v}) = \bar{u}\times\frac{d\bar{v}}{dt} + \frac{d\bar{u}}{dt}\times\bar{v}$.

(c) If (যদি) $\bar{r} = xi + yj + zk$ and (আৰু) $r = |\bar{r}|$ then prove that (প্ৰমাণ কৰা যে)

$\nabla f(r)\times\bar{r} = 0$, where f is any function (য'ত f এটা ফলন হয়).

(d) Evaluate (মান উলিওৱা) :

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x} - e}{x}$$

(e) Find the complete length of the astroid

$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ এষ্ট্ৰইদৰ সম্পূৰ্ণ দৈৰ্ঘ্য নিৰ্ণয় কৰা।

4. Answer **either** *(a)* **or** *(b)* of the following : 10

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ *(a)* বা *(b)* ৰ উত্তৰ লিখা ঃ

(a) *(i)* If (যদি) $u = sin\,ax + cos\,ax$ then prove that (প্ৰমাণ কৰা যে)

$$u_n = a^n\left\{1+(-1)^n sin\,2ax\right\}^{1/2}.$$ 4

(ii) If (যদি) $y = (x^2-1)^n$, show that (দেখুওৱা যে)

$$\left(x^2-1\right)y_{n+2} + 2xy_{n+1} - x(n+1)y_n = 0.$$ 6

(b) Find the radius of curvature at the point (r, θ) of the curve $r = a(1-cos\theta)$ and show that it varies as $\sqrt{r}$.

$r = a(1-cos\theta)$ ৰ (r, θ) বিন্দুত বক্ৰতা ব্যাসাৰ্ধ নিৰ্ণয় কৰা আৰু দেখুওৱা যে ই $\sqrt{r}$ ৰ সমানুপাতিক। 7+3=10

5. Answer **either** *(a)* **or** *(b)* of the following : 10

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ *(a)* অথবা *(b)* ৰ উত্তৰ কৰা ঃ

(a) Obtain a reduction formula for $\int tan^n\,x dx$.

If $I_n = \int_0^{\pi/4} tan^n\,x\,dx$, prove that

$(n+1)(I_{n+1} + I_{n-1}) = 1$.

$\int tan^n\,xdx$ ৰ লঘুকৰণ উপপাদ্য নিৰ্ণয় কৰা।

যদি $I_n = \int_0^{\pi/4} tan^n\,x\,dx$, প্ৰমাণ কৰা যে

$(n+1)(I_{n+1} + I_{n-1}) = 1$.

(b) Find the perimeter of the curve $r = a(1+cos\theta)$ and show that arc of the upper half is bisected by $\theta = \pi/3$.

$r = a(1+cos\theta)$ বক্ৰৰ পৰিসীমা নিৰ্ণয় কৰা আৰু দেখুওৱা যে ওপৰ অংশৰ বক্ৰচাপে, $\theta = \pi/3$ ত দ্বিখণ্ডিত কৰে।

6. Answer **either** *[(a)* and *(b)]* **or** *[(c)* and *(d)]* of the following : 5×2=10

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ *[(a)* আৰু *(b)]* অথবা *(c)* আৰু *(d)]* ৰ উত্তৰ লিখা ঃ

(a) Prove that (প্ৰমাণ কৰা যে)

$$\nabla\times\left(\nabla\times\bar{F}\right) = \nabla\left(\nabla.\bar{F}\right) - \nabla^2\bar{F}.$$

(b) Find the volume and surface area of the solid generated by the cycloid

$x = a(1+sin\theta)$; $y = a(1+cos\theta)$

about the base.

তলত দিয়া চাইক্লইডৰ ভূমি সাপেক্ষে আয়তন আৰু কালি নিৰ্ণয় কৰা।

$x = a(1+sin\theta)$; $y = a(1+cos\theta)$.

(c) Find the directional derivative of $f(x,y,z) = x^2yz + 4xz^2$ at the point $(1, -2, -1)$ in the direction of the vector $2i - j - 2k$.

$2i - j - 2k$ ভেক্টৰৰ দিশত $(1, -2, -1)$ বিন্দুত $f(x,y,z) = x^2yz + 4xz^2$ ৰ দিশগত অৱকলজ নিৰ্ণয় কৰা।