(d) Answer the following : 1+2+2=5

তলত দিয়াবোৰৰ উত্তৰ কৰা ঃ

(i) Find (উলিওৱা) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\cosh x}{e^x}$

(ii) Show that (দেখুওৱা যে)

$$\frac{d}{dx}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x$$

(iii) Show that (দেখুওৱা যে)

$$\int_{-a}^{a} e^{tx} dx = \frac{2\sinh(at)}{t}$$

———

24R/23A–2025 (MAT2104C)

2025

MATHEMATICS

(Major)

Paper : MAT2104C

(Calculus)

G.T. CHOUDHURY COLLEGE M.L.C. LIBRARY

Full Marks : 45

Time : 2 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

1. Answer the following questions : 1×4=4

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ লিখা ঃ

(a) Define arc length of a curve.

বক্ৰৰ ধনুচাপৰ দৈৰ্ঘ্যৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(b) Can L'Hospital rule be applied to evaluate limit which are not in indeterminate form?

লা-হস্পিটাল নিয়মটো অনিৰ্ধাৰ্য্য ৰূপত নথকা ফলনৰ সীমা উলিয়াবৰ বাবে ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰিনে?

(c) Write the equation of the tangent at a point (x, y) on the curve $y = f(x)$.

$y = f(x)$ বক্ৰৰ (x, y) বিন্দুত স্পৰ্শকৰ সমীকৰণ লিখা।

G.T. CHOUDHURY COLLEGE M.L.C. LIBRARY

(d) If (যদি) $x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta$,

find (উলিওৱা) $\dfrac{dy}{dx}$.

2. Answer the following questions : 2×3=6

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা ঃ

(a) Find the value of the n-th derivative of $y = e^{mx}$ at $x = 0$.

$x = 0$ বিন্দুত $y = e^{mx}$ ফলনৰ n-তম অৱকলজৰ মান উলিওৱা।

(b) If (যদি) $y = \sin(\sin x)$,

prove that (প্ৰমাণ কৰা যে)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \tan x \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dy}{dx} + y\cos^2 x = 0.$$

(c) Determine $\lim_{x \to \pi/2} \dfrac{\tan 3x}{\tan x}$.

$\lim_{x \to \pi/2} \dfrac{\tan 3x}{\tan x}$-ৰ মান উলিওৱা।

3. Answer the following questions : 5×3=15

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা ঃ

(a) Find the reduction formula for $\int \tan^n x\, dx$.

If $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x\, dx$, then show that

$$I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}.$$ 2+3=5

$\int \tan^n x\, dx$-ৰ লঘুকৰণ সূত্ৰটো উলিওৱা।

যদি $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x\, dx$,

দেখুওৱা যে $I_n + I_{n-2} = \dfrac{1}{n-1}$.

(b) Show that the curvature at the point $\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$ on the curve $x^3 + y^3 = 3axy$ is $\frac{-8\sqrt{2}}{3a}$.

দেখুওৱা যে $x^3 + y^3 = 3axy$ বক্ৰৰ $\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$ বিন্দুত বক্ৰতা $\frac{-8\sqrt{2}}{3a}$.

Or / নাইবা

Find the area of the surface that is generated by revolving the portion of the curve $y = x^3$ between $x = 0$ and $x = 1$ about the x-axis.

$x = 0$ আৰু $x = 1$-ৰ মাজত থকা $y = x^3$ বক্ৰৰ অংশটো x অক্ষৰ সাপেক্ষে আৱৰ্তন কৰিলে সৃষ্টি হোৱা পৃষ্ঠতলৰ কালি উলিওৱা।

(c) Find the n-th derivative of $x^2 e^x \cos x$.

$x^2 e^x \cos x$ -ৰ n-তম অৱকলজ নিৰ্ণয় কৰা।

Or / নাইবা

If (যদি) $\cos^{-1}\left(\frac{y}{6}\right) = \log\left(\frac{x}{n}\right)^n$,

prove that (প্ৰমাণ কৰা যে)

$$x^2 y_{n+2} + (2n+1)\, x y_{n+1} + 2n^2 y_n = 0.$$

4. Answer ***either*** [(a) and (b)] ***or*** [(c) and (d)] from the following : 10

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ পৰা [(a) আৰু (b)] বা [(c) আৰু (d)] উত্তৰ কৰা ঃ

(a) (i) If (যদি) $\phi = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$, find $div(grad\, \phi)$ উলিওৱা। 5

(ii) If (যদি) $\bar{F} = x^2 yi + 2y^3 zj + 3zk$, find $curl\, \bar{F}$ উলিওৱা।

(b) Show that the volume of the ellipsoid formed by the revolution of the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ around its major axis is $\frac{4}{3}\pi ab^2$. 5

দেখুওৱা যে $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তটোৱে নিজৰ মুখ্য অক্ষৰ সাপেক্ষে কৰা আৱৰ্তনৰ ফলত সৃষ্টি হোৱা উপবৃত্তজৰ আয়তন $\frac{4}{3}\pi ab^2$.

(c) Derive the formula for the volume of a right pyramid whose altitude is h and base is a square with sides of length. 5

এটা সৰল পিৰামিডৰ আয়তন নিৰ্ণয় কৰাৰ সূত্ৰ উলিওৱা যাৰ উন্নতি h আৰু যাৰ ভূমি a দৈৰ্ঘ্যৰ বাহুৰ এটা বৰ্গ।

(d) Prove that (প্ৰমাণ কৰা যে)

$\nabla \cdot (\bar{F} \times \bar{G}) = (\nabla \times \bar{F}) \cdot \bar{G} - (\nabla \times \bar{G}) \cdot \bar{F}$. 5

5. Answer ***either*** [(a) and (b)] ***or*** [(c) and (d)] from the following : 10

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ পৰা [(a) আৰু (b)] বা [(c) আৰু (d)] উত্তৰ কৰা ঃ

(a) If $\bar{r} = (a\cos t)\, i + (a\sin t)\, j + (at\tan\alpha)\, k$ where a and α are constants, then find $\left|\frac{d\bar{r}}{dt} \times \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right|$ and $\left[\frac{d\bar{r}}{dt}, \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}, \frac{d^3\bar{r}}{dt^3}\right]$. 5

যদি $\bar{r} = (a\cos t)\, i + (a\sin t)\, j + (at\tan\alpha)\, k$, য'ত a আৰু α দুটা ধ্ৰুৱক ৰাশি, তেন্তে $\left|\frac{d\bar{r}}{dt} \times \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right|$ আৰু $\left[\frac{d\bar{r}}{dt}, \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}, \frac{d^3\bar{r}}{dt^3}\right]$ নিৰ্ণয় কৰা।

(b) Evaluate $\int_C x^2 y dx + x dy$, where C is the triangle with vertices (0, 0), (1, 0) and (1, 2). 5

মান নিৰ্ণয় কৰা $\int_C x^2 y dx + x dy$, য'ত C হ'ল (0, 0), (1, 0) আৰু (1, 2) শীৰ্ষবিন্দুযুক্ত ত্ৰিভুজ।

(c) Prove that the vector point function $\bar{F}(t)$ is of constant direction if and only if $\bar{F} \times \frac{d\bar{F}}{dt} = \bar{0}$. 5

প্ৰমাণ কৰা যে এটা ভেক্টৰ বিন্দু ফলন $\bar{F}(t)$ -ৰ দিশ ধ্ৰুৱক হ'ব যদি আৰু যদিহে $\bar{F} \times \frac{d\bar{F}}{dt} = \bar{0}$।