2 0 2 4

MATHEMATICS

Paper : MAT0300104

(Ordinary Differential Equation)

Full Marks : 60

Time : 2½ hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

M.L.C. LIBRARY
G.L. CHOUDHURY COLLEGE

1. Answer the following questions : 1×8=8

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

(a) Write the order of the following differential equation :

তলত দিয়া অৱকল সমীকৰণটোৰ মাত্ৰা লিখা :

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = \sqrt{\frac{d^2r}{ds^2}+1}$$

(b) State whether the following equation is linear or nonlinear :

তলৰ সমীকৰণটো ৰৈখিক নে অৰৈখিক উল্লেখ কৰা :

$$\frac{d^6x}{dt^6}+\left(\frac{d^4x}{dt^4}\right)\left(\frac{d^3x}{dt^3}\right)+x=t$$

(c) Define integral curves of a first-order differential equation.

এটা প্ৰথম-মাত্ৰাৰ অৱকল সমীকৰণৰ অখণ্ড বক্ৰ (integral curve)ৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(d) Write the general form of a Bernoulli differential equation.

এটা বাৰ্ণৌলী অৱকল সমীকৰণৰ সাধাৰণ ৰূপটো লিখা।

(e) Find the integrating factor of the linear differential equation

$$\frac{dy}{dx}+\frac{3y}{x}=6x^2$$

ৰৈখিক অৱকল সমীকৰণ $\frac{dy}{dx}+\frac{3y}{x}=6x^2$ ৰ অনুকলন গুণক উলিওৱা।

(f) Evaluate :

নিৰ্ণয় কৰা :

$$W(e^x, e^{-x})$$

(g) Write down the UC set of the UC function $x^n e^{ax}$.

$x^n e^{ax}$ UC ফলনটোৰ UC সংহতিটো লিখা।

(h) Define an exact differential equation.

এটা যথাৰ্থ অৱকল সমীকৰণৰ সংজ্ঞা দিয়া।

2. Answer any *six* of the following questions : 2×6=12

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ যি কোনো ছয়টাৰ উত্তৰ কৰা :

(a) For certain values of the constant m the function f defined by $f(x)=e^{mx}$ is a solution of the differential equation

$$\frac{d^3y}{dx^3}-4\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+6y=0$$

Determine all such values of m.

ধ্ৰুৱক m ৰ কিছুমান মানৰ বাবে $f(x)=e^{mx}$ ফলনটো

$$\frac{d^3y}{dx^3}-4\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+6y=0$$

অৱকল সমীকৰণটোৰ এটা সমাধান হয়। m ৰ তেনেকুৱা সকলো মান নিৰ্ণয় কৰা।

(b) Examine whether or not, the differential equation $(3x^2y+2)\,dx-(x^3+y)\,dy=0$ is exact.

$(3x^2y+2)\,dx-(x^3+y)\,dy=0$ অৱকল সমীকৰণটো যথাৰ্থ হয় নে নহয় পৰীক্ষা কৰা।

(c) Find the general solution of

সাধাৰণ সমাধান উলিওৱা

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}-3y=0$$

(d) Find the general solution using method of undetermined coefficients

$$\frac{d^4y}{dx^4}+\frac{d^2y}{dx^2}=3x^2+4\sin x-2\cos x$$

অনিৰ্ণেয় সহগ পদ্ধতিৰে সাধাৰণ সমাধান উলিওৱা

$$\frac{d^4y}{dx^4}+\frac{d^2y}{dx^2}=3x^2+4\sin x-2\cos x$$

(e) Solve by the method of variation of parameters

প্ৰাচলৰ তাৰতম্য পদ্ধতিৰে সমাধান কৰা

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=\cot x$$

★★★

(d) Transform the equation

$$(x^2 - 3y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$$

to a separable equation by appropriate change of variables.

যথাযথ চলক পৰিৱৰ্তন কৰি

$$(x^2 - 3y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$$

অৱকল সমীকৰণটোক এটা পৃথকীকৰণীয় সমীকৰণলৈ ৰূপান্তৰ কৰা।

(e) Show that the functions e^{-x}, e^{3x} and e^{4x} are linearly independent.

দেখুওৱা যে e^{-x}, e^{3x} আৰু e^{4x} ফলনকেইটা ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ।

(f) For the differential equation

$$(4x + 3y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$$

find an integrating factor of the form x^n, where n is a positive integer, so that the equation becomes exact.

$(4x + 3y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$ অৱকল সমীকৰণটোৰ বাবে x^n আকাৰৰ এটা অনুকলন গুণক উলিওৱা, য'ত n এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা, যাতে সমীকৰণটো যথাৰ্থ হয়।

M.L.C. LIBRARY
G.L. CHOUDHURY COLLEG

(g) The roots of the auxiliary equation corresponding to a certain 8th order homogeneous linear differential equation with constant coefficients are

$$4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 2+3i,\ 2-3i,\ 2+3i,\ 2-3i$$

Write the general solution.

ধ্ৰুৱক সহগবিশিষ্ট এটা ৪তম মাত্ৰাৰ সমমাত্ৰিক ৰৈখিক অৱকল সমীকৰণৰ সহায়ক সমীকৰণটোৰ মূলবোৰ হ'ল

$$4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 2+3i,\ 2-3i,\ 2+3i,\ 2-3i$$

সমীকৰণটোৰ সাধাৰণ সমাধান লিখা।

(h) Given that a particular integral of

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 1$$

is $y = \frac{1}{6}$ and a particular integral of $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = x$ is $y = \frac{x}{6} + \frac{5}{36}$. Then find the particular integral of

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 2 - 12x$$

দিয়া আছে যে অৱকল সমীকৰণ

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 1 \text{ ৰ}$$

বিশেষ অনুকল $y = \frac{1}{6}$ আৰু অৱকল সমীকৰণ $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = x$ ৰ বিশেষ অনুকল $y = \frac{x}{6} + \frac{5}{36}$. তেন্তে অৱকল সমীকৰণ

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 2 - 12x \text{ ৰ}$$

বিশেষ অনুকল উলিওৱা।

(i) Show that every function f defined by $f(x) = 2 + ce^{-2x^2}$, where c is an arbitrary constant, is a solution of the differential equation

$$\frac{dy}{dx} + 4xy = 8x$$

দেখুওৱা যে $f(x) = 2 + ce^{-2x^2}$ ৰে সংজ্ঞাবদ্ধ সকলোবোৰ ফলন f, য'ত c এটা যি কোনো ধ্ৰুৱক হয়,

$$\frac{dy}{dx} + 4xy = 8x$$

অৱকল সমীকৰণটোৰ এটা সমাধান হয়।

M.L.C. LIBRARY
G.L. CHOUDHURY COLLEG

(j) The general solution of a second-order homogeneous differential equation with constant coefficients is

$$y = c_1e^x + c_2xe^x$$

Construct the equation.

এটা দ্বিঘাতৰ ধ্ৰুৱক সহগবিশিষ্ট সমমাত্ৰিক অৱকল সমীকৰণৰ সাধাৰণ সমাধান হ'ল

$$y = c_1e^x + c_2xe^x$$

সমীকৰণটো সাজি উলিওৱা।

3. Answer any *four* of the following questions : 5×4=20

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ যি কোনো চাৰিটাৰ উত্তৰ কৰা :

(a) Show that $5x^2y^2 - 2x^3y^2 = 1$ is an implicit solution of the differential equation

$$x\frac{dy}{dx} + y = x^3y^3$$

on the interval $0 < x < \frac{5}{2}$.

দেখুওৱা যে $0 < x < \frac{5}{2}$ অন্তৰালত $5x^2y^2 - 2x^3y^2 = 1$ টো $x\frac{dy}{dx} + y = x^3y^3$ অৱকল সমীকৰণৰ এটা অন্তৰ্নিহিত সমাধান হয়।

দিয়া আছে যে অৱকল সমীকৰণ

$$\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=1$$ ৰ

বিশেষ অনুকল $y=\frac{1}{6}$ আৰু অৱকল সমীকৰণ

$\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=x$ ৰ বিশেষ অনুকল $y=\frac{x}{6}+\frac{5}{36}$. তেন্তে অৱকল সমীকৰণ

$$\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=2-12x$$ ৰ

বিশেষ অনুকল উলিওৱা।

(i) Show that every function f defined by $f(x)=2+ce^{-2x^2}$, where c is an arbitrary constant, is a solution of the differential equation

$$\frac{dy}{dx}+4xy=8x$$

দেখুওৱা যে $f(x)=2+ce^{-2x^2}$ ৰে সংজ্ঞাবদ্ধ সকলোবোৰ ফলন f, য'ত c এটা যি কোনো ধ্ৰুৱক হয়,

$$\frac{dy}{dx}+4xy=8x$$

অৱকল সমীকৰণটোৰ এটা সমাধান হয়।

M.L.C. LIBRARY
G.L. CHOUDHURY COLLEGE

(j) The general solution of a second-order homogeneous differential equation with constant coefficients is

$$y=c_1e^x+c_2xe^x$$

Construct the equation.

এটা দ্বিঘাতৰ ধ্ৰুৱক সহগবিশিষ্ট সমমাত্ৰিক অৱকল সমীকৰণৰ সাধাৰণ সমাধান হ'ল

$$y=c_1e^x+c_2xe^x$$

সমীকৰণটো সাজি উলিওৱা।

3. Answer any *four* of the following questions : 5×4=20

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ যি কোনো চাৰিটাৰ উত্তৰ কৰা :

(a) Show that $5x^2y^2-2x^3y^2=1$ is an implicit solution of the differential equation

$$x\frac{dy}{dx}+y=x^3y^3$$

on the interval $0<x<\frac{5}{2}$.

দেখুওৱা যে $0<x<\frac{5}{2}$ অন্তৰালত $5x^2y^2-2x^3y^2=1$ টো $x\frac{dy}{dx}+y=x^3y^3$ অৱকল সমীকৰণৰ এটা অন্তৰ্নিহিত সমাধান হয়।

(b) Determine the constant A such that the equation

$$(x^2+3xy)\,dx+(Ax^2+4y)\,dy=0$$

is exact. Then solve the exact equation. 1+4=5

$(x^2+3xy)\,dx+(Ax^2+4y)\,dy=0$ অৱকল সমীকৰণটো যথাৰ্থ হোৱাকৈ A ৰ মান উলিওৱা। যথাৰ্থ সমীকৰণটো সমাধান কৰা।

(c) Solve the Bernoulli equation :

বাৰ্ণলী সমীকৰণটো সমাধান কৰা :

$$x\frac{dy}{dx}+y=-2x^6y^4$$

(d) Solve the initial value problem :

প্ৰাৰম্ভিক মানযুক্ত সমস্যাটো সমাধান কৰা :

$$(x^2+1)\frac{dy}{dx}+4xy=x,\quad y(2)=1$$

(e) Given that $y=x$ is a solution of

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-4x\frac{dy}{dx}+4y=0$$

Find a linearly independent solution by reducing the order.

$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-4x\frac{dy}{dx}+4y=0$ অৱকল সমীকৰণটোৰ $y=x$ এটা সমাধান হয়। সমীকৰণটোৰ মাত্ৰা হ্ৰাস কৰি আনটো ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ সমাধান উলিওৱা।

M.L.C. LIBRARY
G.L. CHOUDHURY COLLEGE

(f) Solve the Cauchy-Euler equation :

কচি-ইউলাৰ সমীকৰণটো সমাধান কৰা :

$$3x^2\frac{d^2y}{dx^2}-4x\frac{dy}{dx}+2y=0$$

(g) Solve the following initial value problem using method of undetermined coefficients :

অনিৰ্ণেয় সহগ পদ্ধতিৰে তলত দিয়া প্ৰাৰম্ভিক মানযুক্ত সমীকৰণটো সমাধান কৰা :

$$\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+3y=9x^2+4,\ y(0)=6,\ y'(0)=8$$

(h) Show that the function f defined by $f(x)=(2x^2+2e^{3x}+3)e^{-2x}$ satisfies the differential equation

$$\frac{dy}{dx}+2y=6e^x+4xe^{-2x}$$

and also the condition $f(0)=5$.

দেখুওৱা যে, $f(x)=(2x^2+2e^{3x}+3)e^{-2x}$ ৰে সংজ্ঞাবদ্ধ f ফলনটোৱে অৱকল সমীকৰণ

$$\frac{dy}{dx}+2y=6e^x+4xe^{-2x}$$ ক

সিদ্ধ কৰে আৰু লগতে $f(0)=5$ চৰ্তও সিদ্ধ কৰে।

4. Answer any *two* of the following questions : 10×2=20

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ যি কোনো দুটাৰ উত্তৰ কৰা :

(a) Show that the linear differential equation

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$

has an integrating factor of the form $e^{\int P(x)dx}$ and a one-parameter family of solution

$$ye^{\int P(x)dx}=\int e^{\int P(x)dx}Q(x)\,dx+C$$

দেখুওৱা যে বৈখিক অৱকল সমীকৰণ

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$ ৰ

এটা $e^{\int P(x)dx}$ আকৃতিৰ অনুকলন গুণক থাকে আৰু লগতে সমীকৰণটোৰ এটা একক প্ৰাচলযুক্ত সমাধানৰ পৰিয়াল হ'ল

$$ye^{\int P(x)dx}=\int e^{\int P(x)dx}Q(x)\,dx+C$$

(b) Solve by transforming to homogeneous equation :

সমমাত্ৰিক সমীকৰণলৈ ৰূপান্তৰ কৰি সমাধান কৰা :

$$(x-2y+1)\,dx+(4x-3y-6)\,dy=0$$

M.L.C. LIBRARY
G.L. CHOUDHURY COLLEG

(c) Consider the following differential equation :

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+2y=0$$

(i) Show that x and x^2 are linearly independent solutions of this equation on the interval $0<x<\infty$.

(ii) Write the general solution of the equation.

(iii) Find the solution that satisfies the conditions $y(1)=3,\ y'(1)=2$. Explain why this solution is unique. 4+1+5=10

তলত দিয়া অৱকল সমীকৰণটো লোৱা :

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+2y=0$$

(i) দেখুওৱা যে $0<x<\infty$ অন্তৰালত x আৰু x^2 সমীকৰণটোৰ দুটা বৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ সমাধান।

(ii) সমীকৰণটোৰ সাধাৰণ সমাধান লিখা।

(iii) $y(1)=3,\ \ y'(1)=2$ চৰ্ত দুটা সিদ্ধ কৰা সমাধানটো উলিওৱা। এই সমাধানটো কিয় একক, ব্যাখ্যা কৰা।